Minsterul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

A 60-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Mangalia – 13 aprilie 2009

CLASA a XI-a – SOLUŢII ŞI BAREMURI DE CORECTARE

Problema 1. Fie $(t_n)_n$ un şir convergent de numere reale, $t_n \in (0,1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \in (0,1)$. Definim şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ prin relaţiile

$$x_{n+1} = t_n x_n + (1-t_n)y_n,\ y_{n+1} = (1-t_n)x_n + t_n y_n,$$

pentru orice şi $n \in \mathbb{N}$ şi x_0, y_0 numere reale fixate.

a) Să se arate că şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt convergente şi au aceeaşi limită.

b) Arătaţi că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \in \{0,1\}$ concluzia nu mai este adevărată.

Soluţie şi barem. a) Fie I_n intervalul închis cu capetele x_n, y_n. Rezultă imediat că $\cdots \subset I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_1 \subset I_0$, incluziunile fiind stricte ...... 2 puncte

Notând cu l_n lungimea intervalului I_n, avem $l_n = |x_n - y_n|$ ...... 1 punct

Prin inducţie deducem $l_n = |(2t_0-1)(2t_1-1)\cdots(2t_n-1)||x_0-y_0|$ .... 1 punct

Dacă există n_0 cu $t_{n_0} = 1/2$ avem $l_n = 0$ pentru $n \geq n_0$. Altfel avem $\frac{l_{n+1}}{l_n} = |2t_{n+1}-1| \in (0,1)$ şi criteriul raportului ne dă $\lim l_n = 0$. Conform axiomei lui Cantor există unic $a_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Cum x_n şi y_n sunt, pentru fiecare n simetrice faţă de mijlocul intervalului I_0, rezultă că $a_0 = \frac{x_0+y_0}{2}$ este limita comună a şirurilor $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ .... 2 puncte

b) De exemplu se poate lua $t_n = \frac{1}{2(n+1)^2}$ .... 1 punct

Soluţie alternativă. Notăm $A_n = \begin{pmatrix} t_n & 1-t_n \\ 1-t_n & t_n \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $Un = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Se observă că $U_{n+1} = A_n U_n$ .... 2 puncte

şi $A_n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t_n - 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ .... 2 puncte deci $U_n = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z_n\end{pmatrix}P^{-1}U_0$ unde $z_n = (2t_0-1)\cdots(2t_n-1)$. Ca în soluţia precedentă se arată că $\lim z_n = 0$ de unde se deduce concluzia .... 2 puncte

Problema 2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că pentru orice $x\in\mathbb{R}$, limita

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$$

există şi este finită.

Arătaţi că în orice punct din $\mathbb{R}$ f este derivabilă sau admite derivate laterale finite, de acelaşi modul şi semn contrar..

Soluţie şi barem. Fie $l_x = \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$. Dacă $l_x = 0$ f este evident derivabilă în x şi derivata este zero. .... 1 punct

Dacă $l_x > 0$, să presupunem, de exemplu, că f nu este derivabilă la dreapta în x. Există atunci şiruri $(u_n)_n, (v_n)_n$, cu termeni pozitivi, convergente la 0, şi astfel ca

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+u_n)-f(x)}{u_n} = -l_x \lim_{n\to\infty}\frac{f(x+v_n)-f(x)}{v_n} = l_x,$$

.... 2 puncte

prin urmare funcţia definită prin $\varphi(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ îşi schimba semnul de o infinitate de ori pe orice vecinătate la dreapta a lui x. .... 2 puncte

Din proprietatea valorii intermediare, φ este continuă, rezultă că există un şir $(h_n)_n$ cu termeni pozitivi, convergent la 0, cu $f(x+h_n)-f(x)=0$, în contradicţie cu ipoteza.

Derivabilitatea la stânga se demonstreaza analog iar faptul că numerele derivate sunt opuse este evident. .... 2 puncte

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $AB = BA$ şi $\det B \neq 0$.

a) Arătaţi că dacă $|\det(A+zB)| = 1$ pentru orice $z\in\mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, atunci $A^n = 0_n$.

b) Rămâne adevarată concluzia dacă eliminăm condiţia $AB = BA$?

Soluţie şi barem. a) Funcţia $f(z) = \det(A+zB) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ este polinomială de grad n ($a_n = \det B \neq 0$).

Condiţia $|\det(A+zB)| = 1$ pentru orice z, cu $|z| = 1$ se scrie $f(z)\cdot\overline{(f(z))} = 1$, pentru orice z cu $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. .... 1 punct

Avem

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)(\overline{a}_0 + \overline{a}_1\cdot\overline{z} + \overline{a}_2\cdot\overline{z}^2 + \cdots + \overline{a}_n\cdot\overline{z}^n) = 1 \;\Leftrightarrow$$

$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)(\overline{a}_0 \cdot z^n + \overline{a}_1 \cdot z^{n-1} + \overline{a}_2 \cdot z^{n-2} + \cdots + \overline{a}_n) = z^n.$

Ultima egalitate având loc pentru o infinitate de valori ale lui z, ea este identitate de polinoame. Prin identificarea coeficienţilor obţinem succesiv:

$$a_0 \cdot \overline{a}_n = 0, a_1 \cdot \overline{a}_n = 0, a_2 \cdot \overline{a}_n = 0, \ldots, a_{n-1} \cdot \overline{a}_n = 0$$

deci $a_0 = a_1 = \cdots a_{n-1} = 0$ şi $a_n \cdot \overline{a}_n = 1$ (adică $|\det B| = 1$) ...... 2 puncte

În concluzie $f(z) = a_n \cdot z^n$ adică $\det(A + z \cdot B) = \det B \cdot z^n$ sau $\det[B(B^{-1} \cdot A + z \cdot I_n)] = \det B \cdot z^n$ adică $\det B \cdot \det(B^{-1} \cdot A + z \cdot I_n) = \det B \cdot z^n$, deci $\det(B^{-1} \cdot A + z \cdot I_n) = z^n$ cu $h(z) = z^n$care este polinomul caracteristic al matricei $C = -B^{-1} \cdot A$. Conform teoremei Cayley-Hamilton $(-B^{-1} \cdot A)^n = 0$ de unde $A^n = 0$ .... 2 puncte

b) Condiţia $A \cdot B = B \cdot A$ este necesară după cum se vede din următorul exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$\det(A + zB) = (-1)^{n+1} \cdot z^n$, deci $|\det(A + z \cdot B)| = 1$, dacă $|z| = 1$ şi evident $A^n = A \neq 0$. .... 2 puncte

Problema 4. Fie funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde f este derivabilă, g şi h sunt monotone iar $f' = f + g + h$.

Demonstraţi că mulţimea punctelor de discontinuitate ale funţiei g coincide cu mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei h.

Soluţie şi barem. Prin înmulţire cu e^{-x} relaţia dată se scrie

$$(\mathrm{e}^{-x} f(x))' = \mathrm{e}^{-x} g(x) + \mathrm{e}^{-x} h(x).$$

.... 1 punct

Notăm cu g_1 respectiv h_1 funcţiile din membrul drept. Funcţiile g_1 şi h_1 au limite laterale în fiecare punct deci şi $u = g_1 + h_1$ .... 1 punct

Cum u are în plus proprietatea lui Darboux, fiind o derivată, rezultă că u este continuă pe $\mathbb{R}$. .... 3 puncte

Notând D_g mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţie g avem $D_g = D_{g_1}, D_h = D_{h_1}$. Dacă prin absurd $D_{g_1} \neq D_{h_1}$ pentru $x \in D_{g_1} \setminus D_{h_1}$ rezultă $x \in D_{g_1 + h_1}$, fals .... 2 puncte